

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 9)

Sommersemester 2004

**Abgabe der Aufgaben 1 bis 4 bis 22.06.04, 18.00 Uhr
im Postfach 84 Ebene 6 und
Aufgabe 5 bis 29.06.04, 18.00 Uhr per E-Mail an
“lasch@math.uni-bremen.de“**

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

Konvergiert das Newton-Verfahren für die Funktion

$$f(x) = x^4 - 2 \quad x \in [0.5, 1.5]$$

mit dem Startwert $x_0 = 1$?

Aufgabe 2:

(3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -4(x - 2)^2 + 2x$ mit Nullstelle im Bereich $[2, 4]$. Zur Bestimmung der Nullstelle sollen 5 Schritte einer Fixpunktiteration $x_{i+1} = f(x_i) + x_i$ mit Startwert $x = 4$ so durchgeführt werden, daß für $i \rightarrow \infty$ Konvergenz eintritt.

Aufgabe 3:

(4 Punkte)

Approximieren Sie numerisch die Konvergenzordnung des Sekanten-Verfahrens am Beispiel der Funktion $f(x) = \sin(x) - 1$. Führen Sie dazu 5 Iterationsschritte mit Startwerten $x_0 = \pi$ und $x_1 = \frac{3}{4}\pi$ durch. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Resultaten der Vorlesung und erklären Sie die Unterschiede.

Aufgabe 4:

(2 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit $|g'(x)| \leq 0.5$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt \bar{x} von g soll mit einem absoluten Fehler kleiner gleich $0.5 \cdot 10^{-6}$ berechnet werden. Die Fixpunktiteration ergibt

$$x_5 = 0.51495 \text{ und } x_6 = 0.51519.$$

Wieviele zusätzliche Iterationen muß man ausführen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 5:

(4 Programmierpunkte)

Programmieren Sie das Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n . Berechnen Sie dabei die Jacobi-Matrix $F'(x^{(k)})$ mittels finiter Differenzen, d.h.

$$\left. \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=x_k} = \frac{F_i(x^{(k)} + h e_j) - F_i(x^{(k)})}{h},$$

wobei e_j den j-ten Einheitsvektor und h die Schrittweite bezeichnet. Programmieren Sie das Verfahren mit der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} F'(x^{(i)}) \Delta x^{(i)} &= -F(x^{(i)}), \\ x^{(i+1)} &= x^{(i)} + \Delta x^{(i)}, \end{aligned}$$

und bestimmen Sie dabei $\Delta x^{(i)}$ mittels einer geeigneten LR-Zerlegung von $F'(x^{(i)})$. Das Verfahren soll abbrechen, falls $\|\Delta x^{(i)}\|_2$ kleiner einer vorgegebenen Toleranz ε ist, oder eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde.

Testen Sie Ihr Verfahren an der Funktion

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1.2 \cdot 10^5 \cdot x_2^{-1} - 1 \\ 10^{10}(x_2 + x_3)(x_1 x_2 x_3)^{-1} - 40 \\ 2 \cdot 10^5 x_1^{-1} - 2 \cdot 10^4(x_2 + x_3)(x_2 x_3)^{-1} - 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit der Nullstelle $\bar{x} = (0.44139 \cdot 10^5, 0.12 \cdot 10^6, 0.59445 \cdot 10^4)^T$.

Die Variablen x_1, x_2, x_3 beschreiben die Widerstände einer elektrischen Schaltung. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = (10^4, 10^4, 10^4)^T$ und Schrittweite $h = 10^{-6}$.

Hinweis: Sie dürfen die LU-Zerlegung von Matlab benutzen. Für die Verwendung einer eigenen LR-Zerlegung von Blatt5, Aufgabe 5 gibt es 1 Punkt extra!